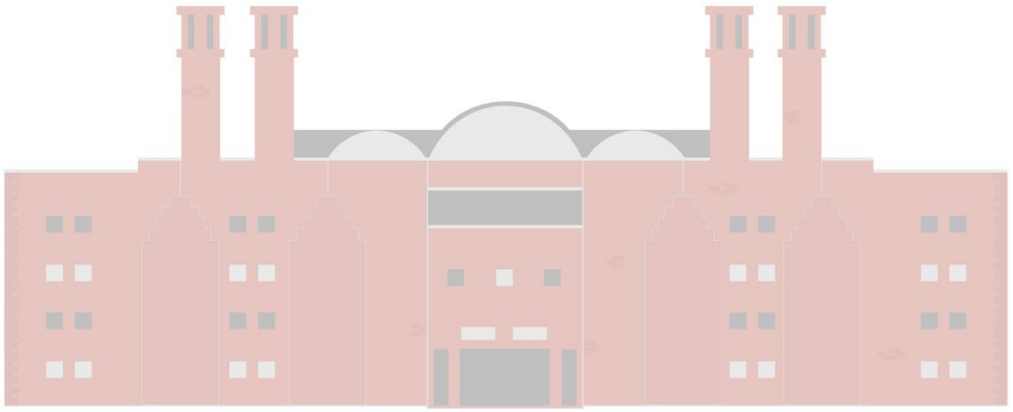
الحُقول الكَهرَطِيسيّة

المحاضرة الخامسة

8 صفحات

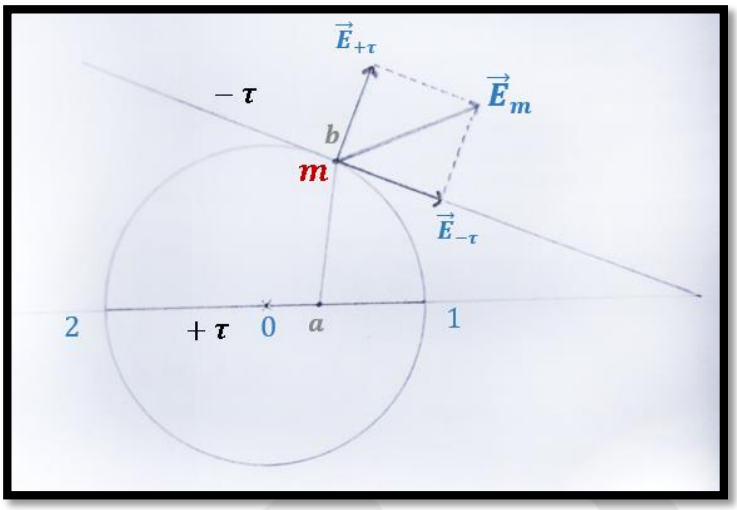


الدكتور: تيسير حجازي

التاريخ: 2014/11/3

تتمة التطبيقات :

2 ـ الحقل الكهربائي لمحورين متوازيين مشحونين :



ليكن لدينا محورين مشحونين يملك أحدهما شحنة $+\tau$ والآخر $-\tau$ ، و لنأخذ بالحقل نقطة اختيارية m و نحسب شدة الحقل فيها وكذلك الكمون :

$$\vec{E}_M = \vec{E}_{+\tau} + \vec{E}_{-\tau}$$

والشدة المحصلة للحقل هي الموجودة على الشكل.

رمزنا للمسافة بين m والمحور المشحون $+\tau$ بـ a

رمزنا للمسافة بين m والمحور المشحون $-\tau$ بـ b

الكمون هو عبارة عن مقدار سلمي يساوي مجموع الكمونات:

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} ln\frac{b}{a} + c$$

- تعتبر معادلة الكمون في حالة خط سوية :

$$\varphi = \text{ثابت} = \frac{b}{a}$$

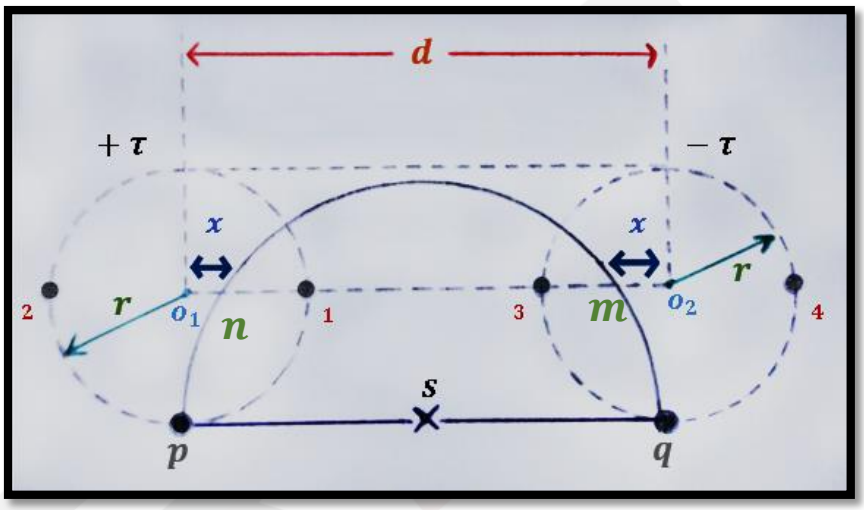
- وخطوط تساوي الكمون هو مجموعة النقاط التي تكون نسبة بعديها عن نقطتين ثابتتين مقداراً ثابت .

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

• و في الهندسة وحسب نظرية الحل الوحيد فإن المحل الهندسي للنقاط التي نسبة مسافتها إلى نقطتين معطاتين هو مقدار ثابت (عبارة عن دائرة) ,لذلك فإن خط تساوي الكمون في حقل محورين مشحونين هو دائرة .

• و يتم إنشاء هذه الدائرة بوصل النقطة m مع المحورين ثم نصل المنصف الداخلي amb و الخارجي bma و النقطتان 1 و 2 تمثلان نقط تقاطع المنصفات مع المنشأ عبر المحاور المشحونة وبالتالي أصبح لدينا 3 نقط بالإضافة إلى النقطتين وبالتالي نقسم المسافة بين النقطتين 1 و 2 فنحصل على نصف القطر و تكون هي المركز .

3 ـ حقل خط ثنائي النواقل :



• نرمز إلى المسافة d بين محوري الخطين الناقلين (يوجد بين الناقلين تحريض كهربائي)كما هو موضح بالشكل .

• الناقل اليساري τ + شحنته واليميني -τ .

• في المسافة بين الناقلين يظهر حقل كهربائي تتوزع الشحنات على الناقلين على سطح كل منهما بكثافة غير منتظمة .

• يعتبر سطح كل ناقل سطح سوية (سطح متساوي الكمون)، في الداخل : $E_{input} = 0$ عندها تعود مسألة الحقل لمحورين مشحونين .

• نفترض أن المحورين المشحونين موجودين في النقاط m , n .

• من شروط التناظر نستنتج أن النقطتين تقعان على مسافة واحدة x من كلا المحورين , فنختار قيمة x بحيث تحقق الشروط الحديه وهي أن الشحنة المكافئة تعطي نفس الحل للشحنة الحقيقية , نكتب معادلة الكمون للنقطة 1 :

$$\varphi = \frac{\tau}{2\,\pi\varepsilon} ln \frac{1}{r-x} + \frac{-2}{2\,\pi\varepsilon} ln \frac{1}{d-r_0-r}$$

$$\Longrightarrow \varphi_1 = \frac{\tau}{2\,\pi\varepsilon} ln \frac{d-r_0-x}{r-x} \quad \dots 1$$

معادلة الكمون للنقطة 2 :

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\,\pi\,\varepsilon} ln \frac{1}{r+x} + \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon} ln \frac{1}{d+r-x}$$

$$\Longrightarrow \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} ln \frac{d+r-x}{r+x} \dots 2$$

و باعتبار أن سطح الناقل هو سطح سوية فإن :

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\,\pi\varepsilon} ln \frac{d-r_0-x}{r-x} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} ln \frac{d+r-x}{r+x} \dots 3$$

$$\Longrightarrow \frac{d-r_0-x}{r-x} = \frac{d+r-x}{r+x}$$

و بالاختصار :

$$\Rightarrow x^2 - dx + r^2 = 0 \dots 4$$

$$\Rightarrow x_{1.2} = \frac{d}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - r^2}$$

• توافق إشارة (-) وضع النقطة n .

• توافق إشارة (+) وضع النقطة m .

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

ننشئ مماس عام للنواقل (المستقيم pq) ثم نقسم المسافة الى النصف (النقطة δ) وننشئ دائرة نصف قطرها p .

$\Longleftarrow$ تعطي نقاط الدائرة (mn) مع الخطين a, p_2 اوضاع المحاور الإحداثية أي تلك المحاور التي يجب أن نركز عليها فكرياً (شحنات النواقل لكي نعتبر سطوح النواقل سطوح سوية) ,

و بما أن الحقل لمحورين مشحونين خارج النواقل يحقق معادله لا بلاس $\nabla^2\varphi = 0$ و في نفس الوقت يحقق الشروط الحديه و لذلك استناداً إلى فرضيه الحل الوحيد فإن الحل الذي حصلنا عليه هو حل حقيقي .

المميزة العامة لمسائل الكهرباء الساكنة و طرق حلها :

(أو دراسة الحقول الكهربائية الساكنة و حل مسائلها)

إنّ المسألة الرئيسية للحقل الكهربائي هي إيجاد شدة الحقل في نقاط الفراغ و كذلك ايجاد الكمون وبالتالي يمكن عن طريق الكمون حساب شدة الحقل ومنها يمكن حساب التحريض الساكن أو كثافة الشحنة الكهربائية و الطاقة و غيرها . .

و في جميع الحالات السابقة فإن الحقل الكموني يتعين من ميزته الشعاعية و ثابت العازلية ε التي يمكن أن تختلف من وسط إلى آخر و كذلك الشروط الحدية تساعد على استنتاج تغيراته بسهولة فيما إذا كان متجانساً و بالتالي متوقف توليده على الشحنة الكهربائية الحرة و هندسية الجسم الناقل لهذه الشحنة لذلك نستنتج أنّ الخصائص الرئيسية لـ $\vec{E}$ هي الميزة الشعاعية (شدة الحقل و التحريض الكهربائي) , الخصائص الكهربائية للوسط , الشروط الحدية , منابع الحقل الكهرساكن .

• لذلك فإن المقصود من حلّ الحقل الكهربائي $\vec{E}$ هو إيجاد الخصائص المجهولة اعتماداً على الخصائص المعروفة فيه و حسب نوعيتها لدينا 3 مسائل رئيسية :

1 ـ مسائل الصنف الأول :

تكمن في ايجاد الشحنات الكهربائية الحرة المولدة للحقل حينما يكون توزع الكمون بالفراغ معطى $\varphi(x, y, z)$ و بالتالي شدة الحقل معلومة ويمكن حل هذا النوع من المسائل بمساعدة معادلة بواسون $\nabla^2\varphi = \frac{-\rho}{\varepsilon}$

مثال : في مجال ما من الفضاء يملك حقلاً كمونه يتعلق فقط بالإحداثية x في جملة الاحداثيات الديكارتية .

$$\varphi = 5x^2 - 60x$$

المطلوب : إيجاد قانون تغير كثافة الشحنات الحرة في هذا الحقل .

الحل : تحل المعادلة بمساعدة معادلة بواسون $\nabla^2\varphi = \frac{-\rho}{\varepsilon}$

و في جمله الاحداثيات الديكارتية :

$$\nabla^2\varphi = \frac{d_2\varphi}{dx^2} + \frac{d_2\varphi}{dy^2} + \frac{d_2\varphi}{dz^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \Longrightarrow \frac{d_2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

نفاضل مرتين بالنسبة ل x فيكون :

$$\frac{d\varphi}{dx} = 15x^2 - 120x$$

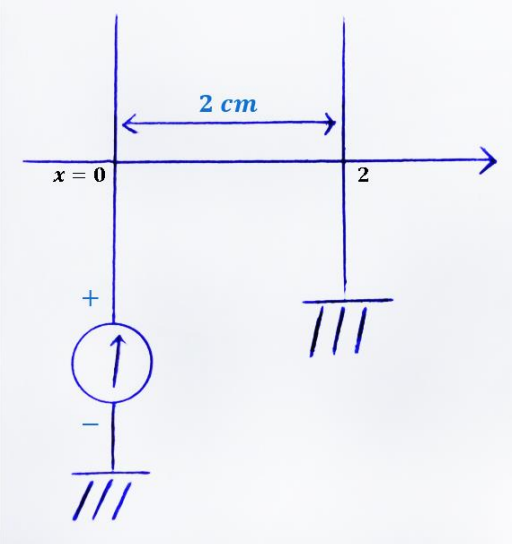
$$\frac{d^2\varphi}{dx} = 30x - 120$$

$$\Longrightarrow 30x - 120 = -\frac{\rho}{\varepsilon} \Longrightarrow \rho = (-30x + 120)\varepsilon$$

2 ـ مسائل الصنف الثاني :

يعطى قانون توزع الشحنات الحرة في الفراغ كتابع للإحداثيات $\rho(x,y,z)$ و المطلوب ايجاد قانون تغير الكمون في الفضاء $(x\,,y\,,z)$ وتعتبر هذه المسألة معاكسة للمسألة السابقة .

مثال:



وضعنا في الفراغ مسريين مستويين على مسافة 2 (سم) من بعضهماالبعض حسب الشكل ,الأيمن مؤرّض و الأيسر وصل إلى القطب الموجب للبطارية (حيث القوة المحركة الكهربائية تساوي ق.م.ك 200 فولط) و ربط القطب السالب للبطارية إلى الأرض , في الفضاء بين المسريين نوزع شحنة حجمية ذات كثافة $\rho = -a\varepsilon_0 x$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

حيث : $a = 30\ kv/cm^3$ و x المسافة من الصفيحة اليسرى .

المطلوب : إيجاد قانون تغير الكمون في الفضاء بين المسريين .

الحل:

نحل المسألة اعتماداً على معادلة بواسون $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ و بفرض أن أبعاد المسريين كبيرة بالمقارنة مع المسافة بينهما , نوجه المحور x كما هو موضّح بالشكل (إنّ الكمون يتعلق بالإحداثي x و لا يتعلق ب y و z) , فنجد :

$$\Rightarrow \nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

نكامل مرتين بالنسبة لِ x :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{ax^2}{2} + c_1$$

$$\varphi = \frac{ax^3}{6} + c_1x + c_2$$

و نحسب c_1 و c_2 من الشروط الحدية للمسألة :

$$x = 0 \Rightarrow \varphi = 200 = c_2$$

$$x = 2 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow c_1 = -20100 \quad v/cm$$

بالتعويض نجد:

$$\varphi = 5000x^3 - 20100x + 200 \qquad [v]$$

3 ـ مسائل الصنف الثالث :

تكون الكمونات أو الشحنات الكهربائية الكلية معروفة لدينا و كذلك الشكل الهندسي للأجسام المولدة للحقل ، و يكون المطلوب إيجاد قانون تغير شدة الحقل $\vec{E}$ و كذلك كمون $\vec{\varphi}$ كل نقطة

من نقاط الحقل , في هذه الحالة يجب أن تتحدد أيضاً الشروط الحدية , و هذا النوع من المسائل يمكن أن يحل تحليلياً أو تخطيطياً أو بواسطة التمثيل الكهربائي .

وفي أبسط الحالات تحل المسائل للحقول تحليلياً أو بواسطة ما يسمى بالطريقة التحليلية يمكن أن يكون بواسطة الصيغة التكاملية لفرضية غاوس أو باستخدام معادلة لابلاس .

ويمكن تقسيم الطرق التحليلية لحلّ مسائل الصنف الثالث إلى مجموعتين :

في المجموعة الأولى يتم تكامل معادلة لابلاس بدون استخدام عمليات مساعدة (صناعية) .

و في المجموعة الثانية تستخدم الطرق الصناعية (نظرية الصور الصناعية (خيال المرآة)) .

وكذلك يمكن أن نستخدم الطريقة التخطيطية أيّ انشاء مجموعة خطوط القوى و تساوي الكمون مستخدمين خواص معروفة سابقاً للحقل الكهربائي , وهذه القواعد تستخدم لكل الحقول الثابتة بالزمن ، **و من أهم الطرق :**

1) الـطـرق الـتـحـلـيـلـيـة .

2) طريقة الصور الكهربائية (خيال المرآة) .

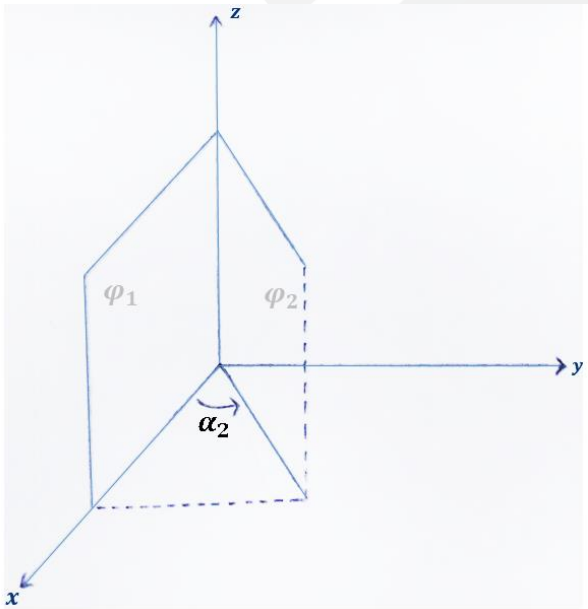
3) الطريقة الـتـخـطـيـطـيـة .

4) طريقـة فصل المتحولات .

5) طريقة الـتـفـاضـلات المـحـدودة .

6) طريقة الـتـمثـيـل التطابقي لـلأشـكال .

مسألة عن الصنف الثالث :



صـفيحتان معدنيتان (ذواتَا امتداد لا نهائي نظرياً) موجودتان بالهواء و مشـكلتان بدون أن تتلامسـا حـيـث : α_1 زاوية ذات اتجاهين و φ_1 كـمـون الصفيحة الأولى وَ φ_2 كمون الصفيحة الثانية .

المطلوب : اسـتنتاج معادلات الكمون السـاكن و شـدة الحقل في أي نقطة من نقاط الحقل داخل الزاوية ثنائية السطوح ، و كذلك تحديد معادلـة كثافة الشحنة الكهربائية في الصفائح , علماً أنّ $\varphi_1 = 0 , \varphi_2 = 100 , \alpha_2 = 30°$.

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

الحل:

- بما أنّ السطوح حديّــة فمن الأفضل كتابتها بجملة الإحداثيات الأسطوانية .
- في الفضاء بين المسريين لا توجد شحنات حرة .
- تُحَل المسألة اعتماداً على معادلة لابلاس و في جملة الإحداثيات الأسطوانية : $\nabla^2\varphi = 0$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = 0$$ **ويتعلق الكمون فقط بـ r و z**

$$\Rightarrow \varphi = c_1\alpha + c_2$$

حيث c_1 و c_2 ثوابت التكامل

$$\alpha = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi_1 = 0$$

$$\alpha = \alpha_2 \Rightarrow \varphi = \varphi_2 = 100$$

$$\Rightarrow c_2 = 0\,, c_1 = \frac{100}{\frac{\pi}{6}} = \frac{600}{\pi} \qquad \Rightarrow \varphi = \frac{600}{\pi}\alpha$$

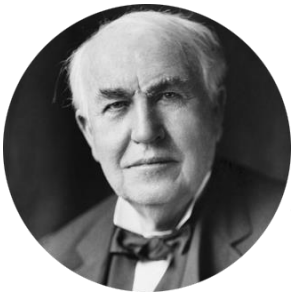
و تملك شدّة الحقل مركبة وحيدة فقط متعلقة بِـ α :

حقل كمون تابع لمركبة واحدة $E_\alpha = -\frac{d\varphi}{rd\alpha} = -\frac{c_1}{r} = -\frac{600}{\pi r}$ $\frac{v}{m}$

$$\sigma = D = \varepsilon_0 E = -\frac{600\varepsilon_0}{\pi r}$$

و عندما $r = 2\ cm \Leftarrow$ $\sigma = D = -8.48 \times 10^{-8}$ c/m^2

انتهت المحاضرة . .



ليس هناك بديل للعمل الجاد . .

توماس أديسون

مخترع و رجل أعمال أمريكي